REU 2021 témák

2021. április 27.

1. Alpern és a mókusok

Az Alpern's caching game nevű játékben egy mókus n hely valamelyikére elás d mogyorót. Összesen 1 egység mélyre áshat. Ezután jön a farkas és megpróbálja mind a d mogyorót megtalálni. A farkas ismeri az n helyet és összesen k egység mélyre áshat. Ha az összes mogyorót megtalálja, akkor a farkas nyer, ha legalább egy rejtve marad, akkor a mókus. Milyen stratégiát érdemes követniük? Optimális játék esetén mennyi lesz a farkas nyerési esélye?

Meglepő módon a mókus néha jobban jár, ha nem használja ki a teljes ásási kapacitását. Ennek segítségével be lehet látni, hogy a farkas nyerési esélye legfeljebb $\frac{k^d}{\binom{n+d-1}{d}}$ és sejtés, hogy ez éles minden elég nagy n-re, kivéve esetleg pár kis k értéket. Ez a sejés azonban csak egész k-ra ismert, nem egész k-kra szinte semmit nem tudunk, de majd ti kitaláljátok.

Pár kapcsolódó olvasnivaló:

S. Alpern, R. Fokkink, T. Lidbetter, and N. S. Clayton, A search game model of the scatter hoarder's problem, Journal of The Royal Society Interface 9(70):869–879, 2012.

E. Csóka, Limit theory of discrete mathematics problems, https://arxiv.org/abs/1505.06984.

D. Pálvölgyi, All or Nothing Caching Games with Bounded Queries, https://arxiv.org/abs/1702.00635.

2. Erős extremális gráfelmélet

A Turán-féle extremális probléma azt vizsgálja, hogy adott n és rögzített F mintagráf mellett milyen $m = m(n, F)$ élszám esetén lehetünk benne biztosak, hogy egy n csúcsú alaphalmazon felvett m különböző él megad egy F-fel izomorf részgráfot.

Vegyünk most m él helyett M darab (különböző színű) H részgráfot an n-csúcsú alaphalmazon, amelyek éldiszjunktak. Milyen, H-tól függő $M = M(n, F)$ esetén biztos, hogy létezik a olyan F-fel izomorf részgráf, amelynek minden éle különböző színű?

Javasolt Problémák

- H cseresznye, vagy általánosan: csillag vagy út
- H teljes vagy teljes páros gráf.

3. Extremális reguláris gráfok: K_{d+1} esete

Legyen $\mathcal{G}_d$ a d-reguláris gráfok összeségét. Jónéhány gráfparaméter esetén az a sejtés, hogy a K_{d+1} maximalizáló gráf. (Nagyon gyakran $K_{d+1}, K_{d,d}$ vagy a végtelen d-reguláris fa $\mathbb{T}_d$ valamelyike az extremális gráf, ezutóbbi eset egy kicsit trükkös.) Itt néhányat említek meg ezek közül. Alábbiakban mindenhol $v(G)$ jelöli egy gráf csúcsainak számát.

Sejtés: Legyen d páros és jelölje $\varepsilon(G)$ a G gráf Euler irányításainak a számát, ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$\varepsilon(G)^{1/v(G)} \leq \varepsilon(K_{d+1})^{1/v(K_{d+1})}.$$

Sejtés: Legyen d páros és legyen $M(G, \lambda) = \sum_{k=0}^{v(G)} m_k(G)\lambda^k$, ahol $m_k(G)$ a k élű párosítások száma a G-ben. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ és $\lambda \geq 0$ esetén

$$M(G, \lambda)^{1/v(G)} \geq M(K_{d+1}, \lambda)^{1/v(K_{d+1})}.$$

A sejtés be van bizonyítva ha λ nagyon pici vagy nagyon nagy. Páratlan d-re nem igaz az állítás ha λ nagy.

Sejtés: Legyen

$$Z(G, q, w) = \sum_{A \subseteq E(G)} q^{k(A)} w^{|A|},$$

ahol $q \geq 1$ és $w \geq 0$ és $k(A)$ a (V, A) összefüggő komponenseinek száma. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$Z(G, q, w)^{1/v(G)} \leq Z(K_{d+1}, q, w)^{1/v(K_{d+1})}.$$

A sejtés be van bizonyítva ha q egész.

Sejtés: Legyen $F(G)$ a G gráf feszítőerdőinek száma. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$F(G)^{1/v(G)} \geq F(K_{d+1})^{1/v(K_{d+1})}.$$

4. Hipergráfok lefogása és színezése

A H hipergráf csúcsai legyenek egy P síkbeli ponthalmaz pontjai, hiperélei pedig azon részhalmazok melyek kivághatók egy olyan tengely-párhuzamos téglalappal, melynek alja az x tengelyen van. Ismert, hogy létezik ún. polikromatikus k-színezés, melyre a (legalább) $3k-2$ méretű élek mindegyik színt tartalmazzák (https://arxiv.org/abs/1302.2426). Legjobb alsó korlát kb. $1.67k$. Ezeket a korlátokat szeretnénk javítani. Egyik lehetséges módszer, hogy csak adott méretű hiperéleket meghagyva (így a hipergráf m-uniform lesz valamely m-re) c-sekély lefogó ponthalmaz keresése valamely c-re, azaz amelyik minden hiperélből legfeljebb c csúcsot tartalmaz. Nem tudjuk létezik-e ilyen (az uniformitás feltétele mindenesetre szükséges). Ennél gyengébb struktúra r-ritka lefogó ponthalmaz, azaz amelyik minden hiperélnek legfeljebb r-ed részét tartalmazza. A fenti k-színezés segítségével tudunk 2/3-ritka lefogó ponthalmazt megadni (fontos, hogy itt viszont nem kell megkövetelnünk, hogy a hipergráf uniform). Van példa amelyben nincs 1/2-nél ritkább lefogó ponthalmaz. Kérdés, mi a legkisebb lehetséges r.

Ez a lefogó ponthalmazos megközelítés segíthet két másik kapcsolódó hipergráf színezésében, melyekről még azt sem tudjuk, hogy 2-színezhetőek-e a legalább m méretű hiperélei valamely m-re.

Egyikük az ún. shift-chain (definíciót lásd pl. https://arxiv.org/abs/1310.6900), mely speciális esete a speciális shift-chain, más néven ABA-mentes hipergráf, amiről viszont lehet tudni hogy van 2-sekély lefogó ponthalmazuk (https://arxiv.org/abs/1410.0258).

Másikuk az egészek valamely véges részhalmazán 2-hatvány különbségű véges számtani sorozatok által kimetszett részhalmazok hipergráfja, lásd bővebben itt: https://coge.elte.hu/kutverseny21.pdf a Számtani Sorozatok Szétszedése c. kérdést.

5. Multiplikatív komplementumok

Legyen A és B a nemnegatív egészek két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy A és B aszimptotikus additív komplementumok, ha minden elég nagy egész szám felírható $a+b$ ($a \in A$, $b \in B$) alakban. Jelölje $A(x)$ az A halmaz elemeinek számát x-ig és $B(x)$ a B elemeiét. Könnyen látszik, hogy ha A és B aszimptotikus additív komplementumok, akkor

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{x} \geq 1.$$

Danzer mutatta meg, hogy vannak olyan A és B végtelen részhalmazai a nemnegatív egészeknek, hogy A és B aszimptotikus additív komplementumok és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{x} = 1.$$

A fenti fogalom mintájára, ha A és B a pozitív egészek két részhalmaza, akkor A és B aszimptotikus multiplikatív komplementumok, ha minden elég nagy pozitív egész felírható

ab ($a \in A$, $b \in B$) alakban. Ha A és B végtelen halmazok aszimptotikus multiplikatív komplementumok, akkor igazolható, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{x} = \infty.$$

Az érdekes feltétel az, ha feltesszük, hogy $A(x) = o(x)$ és $B(x) = o(x)$. Ha $f(x) \to \infty$, amint $x \to \infty$, akkor vannak olyan A és B aszimptotikus multiplikatív komplementumok, amikre $A(x) = o(x)$, $B(x) = o(x)$ és

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{xf(x)} = 0.$$

Másrészt ekkor

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{\frac{x^2}{\log^2 x}} > 0.$$

Könnyen megadhatók olyan A és B aszimptotikus multiplikatív komplementumok, amikre

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{\frac{x^2}{\log x}} < \infty.$$

A cél, hogy az aszimptotikus additív komplementumokra vonatkozó eredményeknek megfelelő állításokat bizonyítsunk aszimptotikus multiplikatív komplementumokra és a fenti eredményeket élesítsük.

6. Polinomok monokromatikus gyökei

A Ramsey-elmélet első eredménye Schur 1912-ből származó tétele, ami szerint tetszőleges k esetén a pozitív egészeket k színnel színezve az $x + y = z$ egyenletnek végtelen sok monokromatikus megoldása van. Ezt a tételt Rado általánosította lineáris egyenletekre. Ha az előző egyenlet mintájára a $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ egyenletet vesszük, ahol p egy polinom, akkor az a feltétel, hogy p-nek a pozitív egészek közt végtelen sok megoldása van, még nem garantálja, hogy tetszőleges két színnel színezés esetén is lesz végtelen sok monokromatikus megoldása a pozitív egészek közt. Több polinom esetén már sikerült pozitív eredményeket bizonyítani. Egy ilyen eredmény a következő:

1. Tétel (Green, Lindqvist, 2017)**.** *Az $x + y = z^2$ egyenletnek a pozitív egészek tetszőleges 2-színezése esetén végtelen sok monokromatikus megoldása lesz.*

Általánosabban:

2. Tétel (Liu, Pach, Sándor, 2018). *Legyen $p(z) = a_d z^d + \cdots + a_0$, $a_d > 0$, a_i egész. Tegyük fel, hogy $p(1)p(2)$ páros. Ekkor az $x + y = p(z)$ egyenletnek a pozitív egészek tetszőleges 2-színezése esetén végtelen sok monokromatikus megoldása lesz.*

A fenti polinomra 3 színnel színezve a pozitív egészeket már nem garantálható végtelen sok monokromatikus megoldás. A projekt célja, hogy további polinomok esetén garantáljunk végtelen sok monokromatikus megoldást a pozitív egészek 2-színezése esetén. Egy természetes általánosítás például, hogy mely a és b pozitív egészek esetén lesz az

$$ax + by = p(z)$$

egyenletnek végtelen sok monokromatikus megoldása.

7. Számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok

Mekkora lehet $\mathbb{Z}_m^n$ egy olyan részhalmaza, ami nem tartalmaz k hosszú számtani sorozatot? A kérdést elsősorban úgy néznénk, hogy m, k rögzített, és $n \to \infty$. Az extremális méretet jelölje $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$. A kérdés már $k = 3$-ra is nyitott. Ismert, hogy

$$2.217^n \leq r_3(\mathbb{Z}_3^n) \leq 2.756^n,$$

$$3^n/\sqrt{n} \leq r_3(\mathbb{Z}_4^n) \leq 3.611^n.$$

Ezeken a becsléseken javítani talán túl ambíciózus célkitűzés lenne, de pl. bizonyos összetett m-ekre a jelenleg ismert becslések javítása, vagy akár $k > 3$ mellett az eddigieknél jobb konstrukciók találása már sokkal reménytelibb. Érdekes lehet más aritmetikai konfigurációkat is nézni, pl. híres kérdés, hogy mekkora lehet egy corner-free halmaz, vagyis egy olyan $A \subseteq \mathbb{F}_p^n \times \mathbb{F}_p^n$, melyben nem fordul elő az $(a, b), (a + d, b), (a, b + d)$ konfiguráció. Felső becslésekhez a polinom módszer lehet hasznos (például a "slice rank" segítségével), alsó becsléseknél Behrend, és Salem-Spencer konstrukciói adhatnak ihletet, de a kérdések sok más területhez (számítástudomány és információelmélet, geometria), illetve hipergráfokkal kapcsolatos kérdésekhez is kapcsolódnak.

8. Szétvágott Pascal háromszög: rekurziók megszorításokkal

Általános iskolából ismerős kérdés, hogy hányféleképpen olvashatjuk ki a matemat(ika) szót a táblázatból. Világos, hogy válasz 2-hatvány, és később mindez a binomiális tétellel is összefüggésbe hozható lesz.

$n=0$							M						
$n=1$						A		A					
$n=2$					T		T		T				
$n=3$				E		E		E		E			
$n=4$			M		M		M		M		M		
$n=5$		A		A		A		A		A		A	
$n=6$	T		T		T		T		T		T		T

Bemelegítő feladat/1 Hányféleképpen olvashatunk ki egy n-betűs szót, ha egy előre megadott pozíciójú függőleges egyenestől jobbra nem léphetünk? Mi a helyzet, ha a függőleges sáv által határolt tartományban kell maradnunk a kiolvasás közben?

A válasz itt jól meghatározható; a későbbi problémákban főleg n függvényében szeretnénk nagyságrendi becslést adni.

Általános kérdés. Vegyünk egy rekurziót, melyben $R(0,0) = 1$, $R(0,k) = 0 \;\; \forall k \neq 0$, és $R(i,j)$ értéke az $R(i-1, j+t)$ $t \in [-a,a] \cap \mathbb{Z}$ értékek nemnegatív lineáris kombinációjaként fejezhető ki mint

$$R(i,j) = \sum_{t=-a}^{a} \lambda_t \cdot R(i-1, j+t).$$

Észrevétel. A Pascal háromszög esetén legyen $a = 1$, a λ_t értékek rendre $1, 1, 0$.

Bemelegítő feladat/2 Mennyi lesz *általános esetben* az n. sorösszeg?

Probléma Mi történik, ha ebben az általánosabb kontextusban levágunk egy határolófüggvénnyel egy síkrészt, vagyis a megfelelő tartományba eső értékei a rekurziónak nullázódnak?

Észrevétel. A Pascal háromszög esetén $f(x) = 0.5x + C$ alakú egyeneseknek felenek meg a táblázatbeli függőleges határolóknak.

- Vizsgáljuk meg az n. sorösszeg nagyságrendjét, ha $f(x)$ határolófüggvény egyenes $f(x) = mx + b$ (és a kicsi)[1]
- keressünk más függvényekre is választ![2]

A kérdés Pascal háromszögre elég természetes, de általnosan is előkerül alkalmazása az efféle megszorított rekurziónak.

9. Tutte polinom

Egy $G = (V, E)$ gráf Tutte polinomját a következőkeppen definiáljuk:

$$T_G(x,y) = \sum_{A \subseteq E(G)} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-|V|},$$

[1] erre van ismert részeredmény

[2] javasolok én is majd.

ahol $k(A)$ a (V, A) összefüggő komponenseinek száma.

A Tutte polinomra rengeteg sejtés ismert. Itt csak párat említek meg, de a projekt kezdetén továbbiakat is fogok mondani:

Merino-Welsh sejtés: Ha G gráf nem tartalmaz elvágóélet és hurokélet, akkor

$$T_G(1,1) \leq \max(T_G(2,0), T_G(0,2)).$$

Valójában a következő erősebb sejtés is ismert:

$$T_G(1,1)^2 \leq T_G(2,0)T_G(0,2).$$

Korrelációs egyenlőtlenség sejtés: Tetszőleges G gráfra és e, f élekre

$$T_{G-e}(2,1)T_{G-f}(2,1) \geq T_G(2,1)T_{G-\{e,f\}}(2,1).$$

Valójában $T_G(2,1)$ a feszítőerdőket számolja meg. Érdekesség, hogy $T_G(1,1)$ a feszítőfákat számolja meg egy összefüggő gráfban és arra ismert a fenti egyenlőtlenség.

Az utóbbi években számos érdekes azonosságot fedeztek fel a Tutte polinomra, mint például a Traldi-Gordon azonosság vagy a Kook-Reiner-Stanton konvoluciós formula, így jó esélyt látok, hogy valamelyik ismert vagy kevésbé ismert sejtést bebizonyítsuk vagy gyengítsük a feltételeket ami mellett egy sejtés ismert.

10. Véletlen bolyongás finomítása

Adott egy n pontú körgráf, az egyenletes eloszlás rajta, ha a fene fenét eszik is, kedvenc Markov láncunk legjobb esetben is csak $\approx n^2$ lépésben közelíti meg ezt mint stacionárius eloszlását. Ez ad is egy becslést a *spektrális résre*,

$$\lambda := 1 - \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \neq 1 \text{ az átmenetmátrix sajátértéke}\},$$

jelen esetben $\lambda \gtrsim 1/n^2$.

Ezen a következő módon variálhatunk. Legyen $0 < \sigma < 1$ rögzített, és $k = \lfloor n^\sigma \rfloor$. A kört k véletlen élen megszakítjuk, a fennmaradó ívek óramutató járása szerinti végeit (a_i) összekötjük az összes óramutatóval ellenkező véggel (b_i).

Tekintsük azt a Markov láncot, ami az íveken a_i-től b_i-ig determinisztikusan(!) lép, majd b_i-ben $1/k$ valószínűséggel lép bármely a_j-be. Könnyen látható, hogy ez így duplán sztochasztikus, tehát jóldefiniált és egyenletes stacionárius eloszlású.

Tétel: Erre a véletlen gráfsorozaton definiált Markov lánc sorozatra, ahogy $n \to \infty$ (és vele együtt $k \to \infty$ a rögzített σ-val), a spektrális résre

$$\lambda > \frac{k}{n} \log^{-c} n$$

aszimptotikusan 1 valószínűséggel.

Tehát eltűnik a négyzetes skálázás, ami a szimpla körnél jelen volt, annak ellenére, hogy az íveken csak determinisztikus lépés történik.

Itt jön az izgalmas - és természetes - kérdés: szimulációkon látjuk, hogy nem 1 valószínűségű lépegetés a legjobb, hanem érdemes lehet egy kis randomizálási komponenst belevenni, azonban erről még nincs pontosabb megértésünk.

Részletesebb és precízebb leírása a modellnek valamint a Tétel bizonyítása megtalálható a https://arxiv.org/abs/1509.01431 cikkben.