Szabályok

A verseny ideje: 2021. január 24. 9:00 – 2021. január 31. 23:59.

A verseny 7 blokkból áll. Minden blokk egy-egy témára épül. A blokkokban vannak az adott téma megértését segítő feladatok is, de nyitott (azaz megoldatlan) kérdések is. A verseny (beleértve az értékelést és a díjazást is) a különböző blokkokban egymástól teljesen függetlenül zajlik.

A témák bősége miatt azt javasoljuk, ne akarjatok mindegyikben elindulni. Inkább kevés témában induljatok, és mélyedjetek el bennük jobban.

A megoldásokat LaTeX-ben (a *.pdf* és a *.tex* fájlt is), blokkonként külön fájlban a lengerd@caesar.elte.hu címre küldjétek a verseny végéig.

A versenyen el lehet indulni egyéniben is, de kisebb (maximum 4 fős) csapatokban is. Aki egyedül indul, annak nem kell külön neveznie, de a csapatoknak ezen a formon kell nevezni legkésőbb január 27. 23:59-ig.

Nem kötelező ugyanabban a csapatban elindulni a különböző blokkokban.

Kérjük, hogy a leadott munkákban jelezzétek, hogy végül a csapat melyik tagjai vettek aktívan részt az adott blokk feladatainak megoldásában.

Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Amennyiben hivatkoznátok valamilyen szakirodalomban megtalálható definícióra, tételre, módszerre, stb., akkor azt pontos forrásmegjelöléssel tegyétek.

Ha van bármi kérdésetek, írjatok a lengerd@caesar.elte.hu címre.

Jó feladatmegoldást kívánunk!

a Verseny szervezői

Számtani Sorozatok Szétszedése

Definíciók:

$D \subset \mathbb{N}$-re jelölje $\mathcal{A}_D$ a $d \in D$ differenciájú, tetszőleges hosszúságú számtani sorozatok családját, és jelölje $\mathcal{A}_D^\infty$ a $d \in D$ differenciájú, végtelen hosszú számtani sorozatok családját.

Legyen $\mathcal{A}$ (ahol $\mathcal{A}$ lehet bármely $\mathcal{A}_D$ vagy $\mathcal{A}_D^\infty$) m-jó, ha minden $S \subset \mathbb{N}$-nek van olyan $S_1 \dot\cup S_2 = S$ partíciója, amire teljesül, hogy ha egy $A \in \mathcal{A}$ sorozatra $|S \cap A| \geq m$, akkor $|S_1 \cap A| \neq \emptyset$ és $|S_2 \cap A| \neq \emptyset$.

Feladatok:

AP-1. Próbáljuk meg jellemezni azokat a D-ket, amikre $\mathcal{A}_D$ illetve $\mathcal{A}_D^\infty$ valamilyen m-re m-jó.

AP-2. Mutasd meg, hogy minden k-ra létezik m_k, hogy bármely m-jó $\mathcal{A}_D$-re minden $S \subset \mathbb{N}$-nek van olyan $S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_k = S$ partíciója, amire teljesül, hogy ha egy $A \in \mathcal{A}_D$ sorozatra $|S \cap A| \geq m_k$, akkor $|S_i \cap A| \neq \emptyset$ minden $1 \leq i \leq k$ indexre. Igaz $\mathcal{A}_D$ helyett $\mathcal{A}_D^\infty$-vel is az állítás? Vagy bármely más m-jó $\mathcal{A}$ részcsaládjára $\mathbb{N}$-nek?

AP-3. Adjunk minél jobb felső becsléseket m_k-ra m és k függvényében. Mi a helyzet, ha $m = 2$? És ha $m = 3$?

AP-4. Ha $D = \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, akkor mi a legkisebb m, amire $\mathcal{A}_D$ már m-jó? Adjunk minél jobb becslést m_k-ra.

Morse elméleti kérdések

Definíciók:

- Egy kompakt topologikus teret (kompakt) *sokaságnak* nevezünk, ha az Hausdorff (T_2) és lokálisan euklideszi, vagyis minden pontjának van $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf környezete. Egy ilyen környezetet (lokális) térképnek hívunk.

- Egy (kompakt) *sima sokaság* egy olyan $(X, \mathcal{A})$ pár, melyben X egy kompakt sokaság, és $\mathcal{A}$ térképek egy olyan X-beli rendszere, mely fedi X-et, és két $\mathcal{A}$-beli térkép metszetén a homeomorfizmusok megszorításainak kompozíciója sima (végtelenszer differenciálható), mint $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részén értelmezett függvény. $\mathcal{A}$-t hagyományosan nem tüntetjük fel a jelölésben.

- Egy $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény sima, ha minden térképen az.

- Egy $x \in X$ pont *kritikus pont* ha valamely x-et tartalmazó térképen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$$

  minden x_i koordinátára. (Ekkor ez a tulajdonság persze a lánc-szabály miatt minden térképen teljesül.)

- Az $x \in X$ kritikus pont *nem-elfajuló* ha egy x-et tartalmazó térképen a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$

  mátrix nem-elfajuló (nem-nulla determinánsú). Ismét, ha ez egy térképen teljesül, akkor igaz lesz minden (x-et tartalmazó) térképen.

- Az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény *Morse* ha minden kritikus pontja nem-elfajuló.

1. Tétel. *Minden kompakt sima sokaságon van Morse függvény. Valójában a Morse függvények egy sűrű részhalmazát adják a sima függvényeknek.*

2. Állítás (Morse Lemma)**.** *Ha $f\colon X \to \mathbb{R}$ Morse és $x \in X$ egy kritikus pont, akkor létezik egy olyan x körüli térkép (ahol x az origóba képződik), hogy*

$$f(x_1, \dots, x_n) = c - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{n} x_i^2.$$

A λ nem-negatív egészt az x kritikus pont indexének nevezzük.

Feladatok:

M-1. Mutassuk meg, hogy egy X kompakt sokaságon egy Morse függvénynek véges sok kritikus pontja van.

M-2. Lássuk be, hogy ha X egy sima kompakt n-dimenziós sokaság és f egy Morse függvény X-en, akkor f-nek mindig van egy 0 és egy n indexű kritikus pontja. Amennyiben X összefüggő, van rajta olyan Morse függvény, melynek pontosan egy 0 indexű és pontosan egy n indexű kritikus pontja van.

M-3. Tegyük fel, hogy X-en van egy olyan Morse függvény, melyen nincs 1 indexű kritikus pontja. Lássuk be, hogy ekkor X egyszeresen összefüggő, vagyis $\pi_1(X) = 1$.

M-4. Lássuk be a fenti következményt akkor, ha olyan Morse függvény van az n-dimenziós X-en, aminek nincs $(n-1)$-indexű kritikus pontja.

M-5. Lássuk be, hogy a körvonalon egy f Morse függvénynek pontosan ugyanannyi 0 indexű és 1 indexű kritikus pontja van. Igaz-e ez az S^2 gömbfelületre?

M-6. Tegyük fel, hogy $X = S^1 \times S^1$ a 2-dimenziós tórusz. Lássuk be, hogy X-en minden Morse függvénynek van legalább két 1 indexű kritikus pontja.

M-7. Találjunk a $\mathbb{CP}^n$ komplex projektív téren (ami egy $2n$-dimenziós kompakt sokaság) olyan Morse függvényt, melynek csak páros indexű kritikus pontjai vannak.

M-8. Hány kritikus pontja van $\mathbb{CP}^n$-en egy olyan Morse függvénynek, melynek csak páros indexű kritikus pontja van?

M-9. Igaz-e az, hogy ha X egyszeresen összefüggő, akkor van rajta olyan Morse függvény, melynek nincs 1 indexű kritikus pontja?

Nyírások

Definíciók:

Legyen $A = \mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{R}$. (A definícióhoz csak az kell, hogy A Abel-csoport legyen.) Legyen $f : A \to A$ egy függvény. Az f-hez tartozó $V_f : A \times A \to A \times A$ *vízszintes nyírás* legyen

$$V_f(x, y) = (x + f(y), y),$$

az f-hez tartozó $F_f : A \times A \to A \times A$ *függőleges nyírás* pedig legyen

$$F_f(x, y) = (x, y + f(x)).$$

Egy mérhető/folytonos/kompakt tartójú/polinom/stb nyírás olyan nyírás, ahol a hozzátartozó f függvény benne van az adott függvényosztályban.

Feladatok:

Ny-1. $A = \mathbb{Z}$. Lássuk be, hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ minden permutációja előáll mint legfeljebb C nyírás szorzata, ahol C abszolút konstans, vagyis a nyírások *korlátosan generálják* a teljes permutációcsoportot.

Ny-2. $A = \mathbb{Z}$. Mi történik a véges tartójú nyírásokkal? Mit generálnak, és azt korlátosan generálják? (f véges tartójú, ha egy véges halmazon kívül 0 az értéke).

Ny-3. $A = \mathbb{R}$. Lássuk be, hogy a folytonos nyírások nem generálják korlátosan, amit generálnak.

Ny-4. $A = \mathbb{R}$. Mit generálnak a polinom nyírások? Lássuk be, hogy korlátosan generálják.

Ny-5. $A = \mathbb{R}$. Generálják-e a mérhető nyírások a 45 fokos egyenesre való tükrözést?

Ny-6. Tegyél fel egy értelmes új kérdést ebben a témában.

Ortogonális vektorok

Definíciók:

Az alábbi kérdésekben $u, v \in \mathbb{F}^k$ esetén u és v (standard) skaláris szorzatát a következő módon jelöljük: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i$. Az alábbi kérdések mindegyikében k (ami a tér dimenziója) és n (ami a vektorok számának 2-szerese/6-szorosa) közötti összefüggéseket keresünk, vagyis arra vagyunk kíváncsiak, n mennyire lehet nagy k függvényében, ha a vektorok kielégítenek egy bizonyos feltételt. A cél minél pontosabban meghatározni, milyen α kitevőkre teljesül $n \leq k^\alpha$ (vagy valamilyen c konstans mellett $n \leq ck^\alpha$ minden k-ra).

Feladatok:

OV-1. Legfeljebb mekkora lehet n, ha vannak olyan

$$u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^k$$

vektorok, melyekre

$$\langle u_i, v_j\rangle\langle u_j, v_i\rangle$$

pontosan akkor nemnulla, ha $i = j$?

OV-2. Legfeljebb mekkora lehet n, ha vannak olyan

$$u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^k$$

vektorok, melyekre

$$\langle u_i, v_j\rangle\langle w_j, x_k\rangle\langle y_k, z_i\rangle$$

pontosan akkor nemnulla, ha $i = j = k$?

OV-3. Legfeljebb mekkora lehet n, ha vannak olyan

$$u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^k$$

vektorok, melyekre

$$\langle u_i, v_j\rangle\langle u_j, v_k\rangle\langle u_k, v_i\rangle$$

pontosan akkor nemnulla, ha $i = j = k$?

OV-4. Vizsgáld a fenti kérdések különböző változatait, például $\mathbb{R}$ helyett másik testet véve. Fogalmazz meg (és próbálj megválaszolni) kapcsolódó kérdéseket.

Speciális expanderek

Definíciók:

Egy (egyszerű irányítatlan) gráfot (n, d, λ, k)-gráfnak nevezünk, ha n csúcsa van, d-reguláris, a szomszédsági mátrixában a $\pm d$-től különböző sajátértékek abszolút értéke legfeljebb λ, és a gráfban nincs pontosan $2k$ hosszú kör.

Feladatok:

SE-1. Legyen $k \geq 3$ egy rögzített egész, és legyen $c > 0$ a k-tól függően kellően kicsi. Igazoljuk, hogy van végtelen sok $(n, d, d/(\log d)^2, k)$-gráf, amelyben $d > n^c$.

SE-2. Az előző állításban vehető $c > \frac{1}{3k}$? Ha igen, akkor a szóba jövő n-ek növekvő sorozatában a szomszédosak hányadosa 1-hez tart?

Tutte polinom

Definíciók:

Egy $G = (V, E)$ gráf Tutte polinomját a következőképpen definiáljuk:

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E(G)} (x-1)^{k(A)-k(E)}(y-1)^{k(A)+|A|-|V|},$$

ahol $k(A)$ a (V, A) összefüggő komponenseinek száma.

Feladatok:

TP-1. Mutasd meg, hogy $T_G(2, 0)$ a G gráf aciklikus irányításainak a száma, $T_G(2, 1)$ pedig a G feszítő erdőinek a száma (aciklikus élhalmazok).

TP-2. Igaz-e, hogy $2T_G(2, 0)T_G(2, 2) \geq T_G(2, 1)^2$ minden összefüggő G gráfra?

TP-3. Igaz-e, hogy $d \geq 4$ esetén létezik olyan $C = C_d > 1$ konstans, hogy tetszőleges d–reguláris n csúcsú G gráfra

$$\frac{T_G(2, 1)}{T_G(2, 0)} \geq C^n?$$

TP-4. Mutasd meg, hogy tetszőleges d–reguláris n csúcsú G gráfra $T_G(0, 1) \leq (d-1)^n$.

TP-5. Adj meg minél jobb C konstanst, hogy tetszőleges 4–reguláris n csúcsú G gráfra $T_G(2, 0) \leq C^n$.

TP-6. Fogalmazz meg magad sejtést a $T_G(x, y)$ polinommal kapcsolatban.

A véletlen gubanc vajon factor of i.i.d.?

Definíciók:

- Legyen $d \geq 3$, $K \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|K| < +\infty$, $x \in K$, $e_K(x) := P_x(\widetilde{H}_K = +\infty)$, ahol P_x jelöli a $\mathbb{Z}^d$ rácson értelmezett, $x \in \mathbb{Z}^d$-ből indított $X(\cdot)$ egyszerű szimmetrikus bolyongás eloszlását, és $\widetilde{H}_K := \inf\{n \geq 1 \,:\, X(n) \in K\}$.

- Legyen $T \in \mathbb{N}_+$, $u \in \mathbb{R}_+$. Legyenek a $N_x^{T,u}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ valószínűségi változók függetlenek és POI(u/T) eloszlásúak. Legyenek $X_{x,i}(\cdot), x \in \mathbb{Z}^d, i \in \mathbb{N}_+$ (az előbbiektől és egymástól) független bolyongások, $X_{x,i}(0) = x$ kezdőponttal. Legyen

$$\mathcal{I}^{u,T} := \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \bigcup_{i=1}^{N_x^{T,u}} \{\, X_{x,i}(0), X_{x,i}(1), \ldots, X_{x,i}(T-1)\,\}. \tag{1}$$

  Legyen $\eta^{u,T}(x) := \mathbb{1}[x \in \mathcal{I}^{u,T}]$, $x \in \mathbb{Z}^d$.

- Legyen Ω egy mérhető tér. Legyen $\eta = (\eta(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ az $\Omega^{\mathbb{Z}^d}$ tér egy véletlen eleme. Ha $y \in \mathbb{Z}^d$, akkor jelölje $\tau_y\eta$ az η konfiguráció y-nal való eltoltját, azaz $\tau_y\eta(x) := \eta(x-y)$. Akkor mondjuk, hogy az η rendelkezik a *factor of i.i.d.* tulajdonsággal, ha van egy olyan $\tilde{\Omega}$ mérhető tér és $\tilde{\eta}$, ami $\tilde{\Omega}^{\mathbb{Z}^d}$ egy olyan véletlen eleme, hogy $\tilde{\eta}(x), x \in \mathbb{Z}^d$ függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá egy olyan $\phi : \tilde{\Omega}^{\mathbb{Z}^d} \to \Omega$ mérhető függvény, hogy

$$\eta(x) = \phi(\tau_x\tilde{\eta}), \qquad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Feladatok:

VG-1. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{Z}^d$ tetszőleges véges K részhalmazára

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{I}^{u,T} \cap K = \emptyset\right) = \exp\left(-u \sum_{x\in K} e_K(x)\right). \tag{2}$$

VG-2. Bizonyítsa be, hogy van $\mathbb{Z}^d$-nek egy olyan véletlen $\mathcal{I}^u$ részhalmaza (amit u intenzitású *véletlen gubanc*nak nevezünk), amire

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{I}^u \cap K = \emptyset\right) = \exp\left(-u \sum_{x\in K} e_K(x)\right), \quad K \subset \mathbb{Z}^d,\ |K| < +\infty. \tag{3}$$

Lássa be továbbá, hogy (3) egyértelműen meghatározza $\mathcal{I}^u$ eloszlását.

VG-3. Lássa be, hogy $\eta^{u,T}$ factor of i.i.d.

VG-4. Lássa be, hogy ha $\eta^u(x) := \mathbb{1}[x \in \mathcal{I}^u]$, akkor η^u factor of i.i.d. Íme egy ötlet, hogy hogyan kezdjünk neki: valamilyen végtelenhez tartó $T_1, T_2, \ldots$ sorozatra csatoljuk a $\mathcal{I}^{u,T_1}, \mathcal{I}^{u,T_2}, \ldots$ halmazokat (azaz adjuk meg egy együttes realizációjukat) oly módon, hogy a közös realizáció is együttesen factor of i.i.d. legyen, továbbá a közös realizációban $\mathcal{I}^{u,T_k}$ és $\mathcal{I}^{u,T_{k+1}}$ olyannyira hasonlítsanak egymásra, hogy $\eta^{u,T_k}(x)$ majdnem biztosan konvergál minden $x \in \mathbb{Z}^d$ esetén, amint $k \to \infty$. Ilyen csatolást lehet, hogy nehéz találni, de reményt kelt, hogy hasonló gondolatmenettel sikerült az ún. *voter model* stacionárius eloszlásáról belátni, hogy factor of i.i.d.