REU 2023 témák

2023. április 5.

1. Vágások lefogása élpárokkal

Legyen $G = (V, E)$ egy $|V| = n$ pontú irányítatlan gráf, melynek az élhalmaza felbomlik két diszjunkt T_1 és T_2 feszítő fára, azaz $E = T_1 \cup T_2$.

1. Feladat. Igazoljuk, hogy G előáll az egy pontú üres gráfból az alábbi lépések segítségével:

(i) felveszünk egy új pontot, majd két éllel bekötjük a korábbi pontok halmazába,

(ii) egy meglévő uv élt felosztunk egy új w ponttal, és w-t összekötjük egy (u-tól és v-től nem feltétlenül különböző) ponttal.

A feladat segítségével igazolható a következő állítás.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy G élei sorbarendezhetőek úgy, hogy T_1 élei páratlan sorszámot kapnak, T_2 élei páros sorszámot kapnak, és G minden köre tartalmaz két egymást követő számot.

A kutatás célja ezen állítás egy bizony értelmben duális változatának igazolása vagy cáfolata. A pontok egy nemüres valódi Z részhalmazára a gráf Z és $V - Z$ között menő éleinek C halmazát G egy **vágásának** nevezzük. A 2. feladatban megfogalmazott állítás vágásokra vonatkozó változata a következő lenne.

3. Probléma. Igaz-e, hogy G élei sorbarendezhetőek úgy, hogy T_1 élei páratlan sorszámot kapnak, T_2 élei páros sorszámot kapnak, és G minden vágása tartalmaz két egymást követő számot?

A kérdés már abban az esetben is nyitott, ha csak a vágások egy speciális részhalmazát tekintjük. A gráf **alapvágásán** egy olyan vágást értünk, mely T_1-et vagy T_2-t pontosan egy élben metsz.

4. Probléma. Igaz-e, hogy G élei sorbarendezhetőek úgy, hogy T_1 élei páratlan sorszámot kapnak, T_2 élei páros sorszámot kapnak, és G minden alapvágása tartalmaz két egymást követő számot?

A probléma egy másik irányú gyengítését kapjuk, ha az élek egy sorbarendezése helyett élpárok egy olyan halmazát keressük, melyek minden vágást lefognak – egy $\{e, f\}$ élpár akkor fog le egy C vágást, ha $\{e, f\} \subseteq C$.

5. Probléma. Adjunk minél jobb (ideálisan a pontok számában lineáris) felső korlátot a G vágásait fedő élpárok minimális számára, ha

(a) bármely élpár használata megengedett,
(b) csak $T_1 - T_2$ élpárokat használhatunk (azaz az pár egyik tagja T_1-ben, a másik tagja T_2-ben van).

A jelenlegi legjobb korlát az (a) esetben $O(n \log n)$, míg a (b) esetben csupán a triviális $O(n^2)$-es felső korlát ismert. Ha T_1 és T_2 is egy-egy Hamilton út, akkor a (b) esetben is elegendő $O(n \log n)$ pár a vágások lefogásához – ugyanakkor ez nagyon messze van a 3. problémában sejtett $O(n)$-es értéktől. A témakörről a [5] cikk 3. fejezetében lehet olvasni.

2. Feszítőfa-párok távolsága

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, továbbá legyenek A_1 és A_2 feszítőfák G-ben. Az alábbi tulajdonság a feszítőfák egy nagyon erős strukturális tulajdonságát írja le.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $e_1 \in A_1$ élre létezik olyan $e_2 \in A_2$ él, melyre $A_1 - e_1 + e_2$ és $A_2 + e_1 - e_2$ is feszítőfa.

A feladatban szereplő cserét **szimmetrikus cserének** nevezzük. Legyenek most $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ és $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ rendezett feszítőfa párok G-ben. White [8] azt a kérdést vizsgálta, hogy mikor lehet eljutni **A**-ból **B**-be szimmetrikus cserék egy sorozatával. Ha létezik szimmetrikus cseréknek ilyen sorozata, akkor a két feszítőfa párt **ekvivalensnek** nevezzük. Ennek természetes szükséges feltétele, hogy $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$ és $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ teljesüljenek – ilyenkor a két feszítőfa párt **kompatibilisnek** nevezzük. White azt sejtette, hogy valójában ez egyben elégséges is, amit az előző fejezetben látott konstruktív karakterizáció (lásd 1. feladat) segítségével lehet igazolni.

7. Feladat. Két feszítőfa pár pontosan akkor ekvivalens, ha kompatibilisek.

A fenti feladat azonban nem mond semmit arról, hogy minimum hány szimmetrikus cserére van szükség ahhoz, hogy **A**-t **B**-be alakítsuk. Hamidoune [6] azt sejtette, hogy ehhez $n - 1$ lépés mindig elegendő.

8. Probléma. Ha két feszítőfa pár ekvivalens, akkor $n-1$ szimmetrikus cserével egymásba alakíthatóak.

A sejtés igaz úgynevezett kerékgráfokra [3], de általában továbbra is nyitott. A legjobb ismert felső korlát a szükséges szimmetrikus cserék számára $O(n^2)$. A kutatás célja ezen felső korlát javítása, akár speciális gráfosztályok esetén. A témakörről és további kapcsolódó sejtésekről a [4] cikkben lehet olvasni.

3. Fedés tarka fákkal

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, melynek élhalmaza felbomlik k éldiszjunkt feszítőfára. Adott G éleinek egy olyan színezése, amelyben minden színosztály legfeljebb két élet tartalmaz. Azt mondjuk, hogy G éleinek egy részhalmaza **tarka**, ha nem tartalmaz két azonos színű élt.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy

(a) G-nek van tarka feszítőfája,

(b) G élhalmaza lefedhető tarka feszítőfákkal.

Jelölje $f(k)$ azt a legkisebb (csak k-tól függő) számot, amire minden fenti G gráf és színezés esetén igaz, hogy G élhalmaza lefedhető $f(k)$ tarka feszítőfával, ha létezik ilyen szám, különben pedig legyen $f(k) = \infty$.

10. Feladat.

(a) Adjunk példát olyan gráfra és színezésre, amely az $f(2) \geq 3$ állítást igazolja.

(b) Lássuk be, hogy $k \geq 3$ esetén $f(k) < \infty$.

A $k = 2$ esetben nem ismert, hogy $f(2)$ véges-e. A $k \geq 3$ esetben Aharoni és Berger [1, 2] egy jóval általánosabb (matroidokra vonatkozó) sejtéséből $f(k) = k$ következne, jelenleg azonban csak $f(k) \leq \frac{5}{2}k +$ konstans felső korlát ismert [7]. A kutatás egyik célja ezen becslések javítása.

11. Probléma. Adjunk minél jobb felső becslést $f(k)$-ra.

Tarka feszítőfák helyett a tarka erdőkkel való fedés is érdekes kérdésekhez vezet. Jelölje $g(k)$ azt a legkisebb számot, amire minden fenti G gráf és színezés esetén G élhalmaza $g(k)$ tarka erdővel fedhető. Mivel minden színosztály legfeljebb két élt tartalmaz, így minden feszítőfa két tarka erdőre bomlik, következésképpen $g(k) \leq 2k$ teljesül. A $k = 2$ esetben ismert, hogy ezen 4 helyett 3 tarka erdő is elegendő.

12. Feladat. Lássuk be, hogy $g(2) = 3$, azaz a $k = 2$ esetben G élhalmaza 3 tarka erdőre bontható, 2 tarka erdőre azonban nem feltétlenül.

A $k \geq 3$ esetben nem ismert $g(k)$ pontos értéke, a korábban említett $f(k) = k$ sejtésből $g(k) = k$ következne.

13. Probléma. Adjunk minél jobb felső becslést $g(k)$-ra.

Hivatkozások

[1] R. Aharoni and E. Berger. The intersection of a matroid and a simplicial complex. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(11):4895–4917, 2006.

[2] R. Aharoni, E. Berger, and R. Ziv. The edge covering number of the intersection of two matroids. *Discrete Mathematics*, 312(1):81–85, 2012.

[3] K. Bérczi, B. Mátravölgyi, and T. Schwarcz. Weighted exchange distance of basis pairs. *arXiv preprint arXiv:2211.12750*, 2022.

[4] K. Bérczi and T. Schwarcz. Exchange distance of basis pairs in split matroids. *arXiv preprint arXiv:2203.01779*, 2022.

[5] K. Bérczi and T. Schwarcz. Partitioning into common independent sets via relaxing strongly base orderability. *arXiv preprint arXiv:2302.01445*, 2023.

[6] R. Cordovil and M. L. Moreira. Bases-cobases graphs and polytopes of matroids. *Combinatorica*, 13(2):157–165, 1993.

[7] F. Hörsch, T. Kaiser, and K. Matthias. Rainbow bases in matroids. *arXiv preprint arXiv:2206.10322*, 2022.

[8] N. L. White. A unique exchange property for bases. *Linear Algebra and its Applications*, 31:81–91, 1980.

4. Extremális reguláris gráfok: K_{d+1} esete

Legyen $\mathcal{G}_d$ a d-reguláris gráfok összeségét. Jónéhány gráfparaméter esetén az a sejtés, hogy a K_{d+1} maximalizáló gráf. (Nagyon gyakran $K_{d+1}, K_{d,d}$ vagy a végtelen d-reguláris fa $\mathbb{T}_d$ valamelyike az extremális gráf, ezutóbbi eset egy kicsit trükkös.) Itt néhányat említek meg ezek közül. Alábbiakban mindenhol $v(G)$ jelöli egy gráf csúcsainak számát.

Sejtés: Legyen d páros és jelölje $\varepsilon(G)$ a G gráf Euler irányításainak a számát, ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$\varepsilon(G)^{1/v(G)} \leq \varepsilon(K_{d+1})^{1/v(K_{d+1})}.$$

Sejtés: Legyen d páros és legyen $M(G, \lambda) = \sum_{k=0}^{v(G)} m_k(G)\lambda^k$, ahol $m_k(G)$ a k élű párosítások száma a G-ben. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ és $\lambda \geq 0$ esetén

$$M(G, \lambda)^{1/v(G)} \geq M(K_{d+1}, \lambda)^{1/v(K_{d+1})}.$$

A sejtés be van bizonyítva ha λ nagyon pici vagy nagyon nagy. Páratlan d-re nem igaz az állítás ha λ nagy.

Sejtés: Legyen

$$Z(G,q,w) = \sum_{A\subseteq E(G)} q^{k(A)} w^{|A|},$$

ahol $q \geq 1$ és $w \geq 0$ és $k(A)$ a (V,A) összefüggő komponenseinek száma. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$Z(G,q,w)^{1/v(G)} \leq Z(K_{d+1},q,w)^{1/v(K_{d+1})}.$$

A sejtés be van bizonyítva ha q egész.

Sejtés: Legyen $F(G)$ a G gráf feszítőerdőinek száma. Ekkor $G \in \mathcal{G}_d$ esetén

$$F(G)^{1/v(G)} \geq F(K_{d+1})^{1/v(K_{d+1})}.$$

5. Extremális spektrál gráfelméleti kérdések

Legyen G egy gráf n csúcson. Legyen $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ az adjacencia mátrixának a sajátértékei. Alább említek néhány tipikus sejtést.

Sejtés: (Elphick, Farber, Goldberg, Wocjan) Legyen $s_+(G) = \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i^2$ és $s_-(G) = \sum_{\lambda_i<0} \lambda_i^2$. Ha G összefüggő, akkor $\min(s_+(G), s_-(G)) \geq n-1$.

Ez valójában két különböző probléma: $s_+(G) \geq n-1$ és $s_-(G) \geq n-1$, ami külön is értékes. A sejtés azért érdekes, mert tetszőleges T fára $s_+(T) = s_-(T) = n-1$, de a K_n teljes gráfra $s_-(K_n) = n-1$ szintén teljesül.

Egy másik gráf sajátértékekre vonatkozó probléma a következő: mi a maximuma $\frac{\lambda_1(G)+\lambda_n(G)}{n}$ kifejezésnek háromszögmentes gráfokra. Azt tudni lehet, hogy a válasz 0.14 és $3-2\sqrt{2} \approx 0.1715$ között van és reguláris gráfokra ismert egy kicsivel jobb felső becslés.

6. Véletlenített átlagolás konvergenciája

Néhány entitás szeretné a méréseit kiátlagolni. Ha hatékonyan szinkron kommunikálnának, elég szép gráf mentén, ez menne is gyorsan. Ehelyett annyit engedünk, hogy egyirányú üzeneteket küldjenek egymásnak. Egy működő séma erre az esetre az ún. ratio consensus (másutt push-sum, weighted gossip), ahol az i entitás a mért x^i mellett egy másodlagos w^i változót is kap, ami fixen 1-ről indul. Egy $i \to j$ üzenet esetén a frissítés

$$x_{t+1}^i = (1-q)x_t^i, \qquad x_{t+1}^j = x_t^j + qx_t^i,$$
$$w_{t+1}^i = (1-q)w_t^i, \qquad w_{t+1}^j = w_t^j + qw_t^i,$$

valamilyen globális rögzített $q \in (0,1)$ aránnyal. Bizonyított, hogy nemtriviális iid üzengetések esetén x_t^i/w_t^i minden szereplőre tart az átlaghoz 1 valószínűséggel, exponenciálisan gyorsan. Na jó, de milyen rátával?

Jól becsülhető rátához arra az esetre szorítkozunk, amikor mindenki minden lépésben küld egy üzenetet, egyetlen véletlen szomszédjának. Legyen a küldési valószínűségek mátrixa P, ennek spektruma λ_i, az entitások száma n. Tranzitív esetben (talán általánosabban is?) kellő munkával a rátára felső becslésként kapjuk az alábbi egyenlet (polinom) legnagyobb gyökét:

$$\frac{q^2}{n}\sum_{j>1}\frac{1-\lambda_j^2}{x-(1-q+q\lambda_j)^2}=1.$$

Szép vagy nem szép, mindenki eldönti, annyiban előnyös, hogy „csak" egy $n-1$-edfokú polinom egyetlen gyöke kell (más megközelítésekben $n^2 \times n^2$ mátrixot kell megérteni, vagy aszimptotikus mennyiségeket).

Itt egy magas labda, hogy erre a gyökre olyan felső becslést mondjunk, ami kevésbé implicit, de azért még mond valamit (azaz $x < 1$-nél erősebbet :)).

Háttér, előzmények: általában az átlagoló folyamatról https://ieeexplore.ieee.org/iel5/8767/27770/01238221.pdfkempedobra, illetve a rátabecslésekről https://ieeexplore.ieee.org/iel7/9/9743955/09382110.pdf, https://arxiv.org/pdf/2104.04802 (a fenti polinomos becslés még nem került publikálásra).

7. Normál felület szingularitások generikus analitikus típusainak invariánsai és kombinatorikája

Az algebrai geometria egyik klasszikus és szép ága a komplex normál felület szingularitások elmélete. Ez két dimenziós komplex felületek (4 valós dimenziós) csúnya pontjait vizsgálja, ahol lokálisan nem úgy néznek ki mint R^4. Egy szinguláris pont kis környezete úgy néz ki mint egy 3-dimenziós kompakt tér fölé állított kúp. Egy sima pont esetén ez a tér egy 3-dimenziós gömb, szinguláris pont esetén azonban egy bonyolultabb 3-dimenziós tér, úgy nevezett gráf 3 sokaság. Ez kombinatorikailag egy gráf, és rajta két féle dekoráció, az önmetszés számok és génusz számok írják le.

Egy klasszikus kérdése a normál felület szingularitások elméletének, hogy analitikus invariánsok mint a geometriai génusz, multiplicitás vagy Milnor szám milyen szinten olvashatóak le a gráf kombinatorikájából. Az utóbbi években egy új lendületet kapott a téma azáltal, hogy fix gráf mellett a lehető leggenerikusabb analitikus típusra számtalan invariánst sikerült leírni, mint például a geometriai génuszt vagy a multiplicitást. A formulák sajátos jellege, hogy legtöbbjük egy a gráfhoz rendelt kvadratikus Riemann-Roch függvényből olvashatóak le kombinatorikus képletekkel.

Bár sok invariánsát sikerült már leírni a generikus analitikus típusnak, számos invariáns esetében ez nyitott kérdés maradt, mint pl a beágyazási dimenzió, vagy a Lipschitz invariánsok, vagy Brill-Noether számok, a kutatási projekt ilyen típusú invariánsok meghatározását célozza az alapfogalmak megtanulása után.

8. Részleges Steiner hármasok kiegészítése

Steiner hármas rendszer (STS(n)) alatt olyan 3-uniform hipergráfot értünk, amelynek minden csúcspárjára pontosan egy hiperél (vagyis 3-elemű halmaz) illeszkedik. Parciális (részleges) Steiner hármas esetén azt követeljük meg, hogy minden csúcspárra legfeljebb egy él illeszkedjen. Általános összefoglalónak a témakörben a [1] kézikönyvet javasoljuk.

Az általános kérdés a következő. Adott egy részleges Steiner hármasrendszer $\mathcal{S}$ n számozott csúcson, vajon ki tudjuk-e megfelelően egészíteni STS(n) hármasrendszerré?

1. Remark. *Világos, hogy ez ekvivalens azzal, hogy adott egy K_n teljes gráf, kiválasztottunk néhány éldiszjunkt háromszöget benne. Vajon a megmaradt élhalmazt tudjuk-e partícionálni diszjunkt háromszögekre?*

Bizonyos állítások ismertek ebben az irányban:

2. Tétel.

- *Néhány oszthatósági kritérium általánosságban szükséges lesz a partícióhoz. Eleve a STS(n) létéhez szükséges hogy $n \equiv 1, 3 \pmod 6$ teljesüljön. [1]*

- *Az oszthatósági kritérium mellett ha $\mathcal{S}$-ben a csúcsok több mint felének 0 a foka, akkor a kiegészíthetőség teljesül [3].*

- *Ha $\mathcal{S}$ kellően ritka, akkor a kiegészíthetőség szintén igazolható [4, 2].*

A cél, hogy olyan speciális hármasrendszer-családokra éles(ebb) állítást mondjuk a fokszámos verzió helyett. A bizonyítás fő nehézsége általában abban áll - gráfos terminológiában -, hogy olyan élhalmazt szeretnénk lefedni, aminek a strukturájáról nem, csak a számosságáról van információnk. Amennyiben van információnk a struktúráról is, az a fedési stratégiára további alternatívákat kínál.

Példa: az n-csúcsú $\mathcal{S}$-ről tudjuk, hogy néhány (k) klikk uniójának élhalmazát fedi le. A klikkek méretének függvényében bizonyítsunk korlátokat arra, hogy mikor létezik mindenképp $\mathcal{S}$-nek kiegészítése valamilyen STS(n) Steiner hármasrendszerré.

Egy ilyen eredmény geometriai jellegű alkalmazásokat is lehetővé tehet.

Hivatkozások

[1] Colbourn, Dinitz, Handbook of combinatorial designs

[2] Nenadov, R., Sudakov, B., Wagner, A. Z. (2020). Completion and deficiency problems. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 145, 214-240.

[3] Bryant, D., Horsley, D. (2009). A proof of Lindner's conjecture on embeddings of partial Steiner triple systems. Journal of Combinatorial Designs, 17(1), 63-89.

[4] Glock, S., Kühn, D., Lo, A., Osthus, D. (2016). The existence of designs via iterative absorption: hypergraph F-designs for arbitrary F. arXiv preprint arXiv:1611.06827. https://arxiv.org/pdf/1611.06827.pdf

9. Additív kombinatorika

Az additív kombinatorika körébe tartozó olyan kérdéseket vizsgálunk majd, ahol azt írjuk elő, hogy egy halmazban egy bizonyos (aritmetikai) minta (például számtani sorozat) ne forduljon elő. (Vagy esetleg éppen azt, hogy sokszor előforduljon.) A konkrét vizsgált kérdéseket a csoport érdeklődéséhez, ötleteihez igazítva választjuk ki a program első napjaiban. Pár lehetséges irányt ismertetünk röviden.

Mi a lehetséges legkisebb mérete egy olyan $A \subseteq \mathbb{F}_p$ halmaznak, melynek minden eleme egy 3 hosszú A-beli számtani sorozat középső eleme? (Azaz minden $a \in A$ esetén van $b, c \in A \setminus \{a\}$ úgy, hogy $2a = b + c$.) És ha $2k + 1$ hosszú számtani sorozat létezését írjuk elő, vagyis minden $a \in A$ esetén kell legyen olyan $d \neq 0$, hogy $a \pm d, a \pm 2d, \ldots, a \pm kd$ mind A-beliek? És ha emellett még azt is megköveteljük, hogy minden $a \notin A$ esetén legyen olyan $d \neq 0$, hogy $a + d, a + 2d, \ldots, a + kd \in A$? Ezek a kérdések az Alon-Jaeger-Tarsi sejtéshez kapcsolódnak, mely azt állítja, hogy ha M egy nemszinguláris mátrix egy legalább 4 elemű test felett, akkor van olyan x, hogy sem x-nek, sem Mx-nek nincs 0 koordinátája.

Mekkora lehet $\mathbb{Z}_m^n$ egy olyan részhalmaza, ami nem tartalmaz k hosszú számtani sorozatot? A kérdést elsősorban úgy néznénk, hogy m, k rögzített, és $n \to \infty$. Az extremális méretet jelölje $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$. A kérdés már $k = 3$-ra is nyitott. Ismert, hogy

$$2.217^n \leq r_3(\mathbb{Z}_3^n) \leq 2.756^n,$$

$$3^n/\sqrt{n} \leq r_3(\mathbb{Z}_4^n) \leq 3.611^n.$$

Ezeken a becsléseken javítani talán túl ambíciózus célkitűzés lenne, de pl. bizonyos összetett m-ekre a jelenleg ismert becslések javítása, vagy akár $k > 3$ mellett az eddigieknél jobb konstrukciók találása már sokkal reménytelibb. Érdekes lehet más aritmetikai konfigurációkat is nézni, pl. híres kérdés, hogy mekkora lehet egy corner-free halmaz, vagyis egy olyan $A \subseteq \mathbb{F}_p^n \times \mathbb{F}_p^n$, melyben nem fordul elő az $(a, b), (a + d, b), (a, b + d)$ konfiguráció. Sarah Peluse nemrég igazolta, hogy ha az $A \subseteq \mathbb{F}_p^n \times \mathbb{F}_p^n$ halmazban nem fordul elő az $(a, b), (a + d, b), (a, b + d), (a, b + 2d)$ konfiguráció, akkor a halmaz sűrűsége legfeljebb $1/\log_m n$, ahol $\log_m$ az m-szer iterált logaritmusfüggvény, és m egy nagyon nagy szám. (Négypontú kétdimenziós minta esetén ez az első ilyen eredmény.)

Felső becslésekhez a polinom módszer lehet hasznos (például a "slice rank" segítségével), alsó becsléseknél Behrend, és Salem-Spencer konstrukciói adhatnak ihletet, de a kérdések sok más területhez (számítástudomány és információelmélet, geometria), illetve hipergráfokkal kapcsolatos kérdésekhez is kapcsolódnak.

10. Graham és Pilz sejtései

Ki lehet-e színezni a pozitív egész számokat n színnel úgy, hogy bármely a-ra az $a, 2a, 3a, \ldots, na$ számok színe páronként különböző legyen? Ismert, hogy végtelen sok n-re a válasz igen, olyan n viszont, amire nem létezik színezés nem ismert. A legkisebb nyitott eset $n = 195$. A kérdés úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbb{Z}^{\pi(n)}$ parkettázható-e egy n elemű halmaz eltoltjaival. Igen válasz esetén az állítás Graham egy sejtésének erősítése (melyet Balasubramaniam és Soundararajan már megoldottak, azonban bizonyításuk hosszú, és technikai jellegű). A kérdéshez részben szintén kapcsolódik Pilz sejtése, aminek motivációja kódelméleti, és azt állítja, hogy az $A, 2A, \ldots, nA$ halmazok szimmetrius differenciája mindig legalább n elemű, ha A az egészek egy véges részhalmaza. (Itt $kA = \{ka : a \in A\}$.) Nem nehéz belátni, hogy a szimmetrikus differencia elemszáma legalább $\pi(n)$, a legjobb alsó korlát $n/(\log n)^\lambda$ alakú ($\lambda \approx 0.2223$).

11. Baire kategória és végtelen kombinatorika

Az elmúlt néhány évben nagyon aktív terület a valós számokon értelmezett lokálisan véges gráfok tulajdonságainak vizsgálatata. Ennek egyik fő motivációja az, hogy klasszikus, paradoxikus átdarabolásokról szóló kérdések átfogalmazhatók párosításokról szóló kérdésekké.

A hír(hedt)es Banach-Tarski Paradoxon például egy, a tér izometriái által meghatározott gráfban való teljes párosítás létezésén alapszik. Az eredeti bizonyítás természetesen használja a Kiválasztási Axiómát, így az átdarabolás nagyon csúnya darabokkal valósul meg. Ez persze szükségszerű: nyilvánvaló, hogy a darabok nem lehetnek Lebesgue-mérhetők.

Meglepő módon Dougherty-Foreman [2] belátták, hogy ha a Lebesgue-mérhetőség feltételét Baire-mérhetőségre cseréljük[1], az átdarabolás így már megvalósítható, sőt, Marks-Unger [3] később lényegében azt is bizonyították, hogy valahányszor létezik egy átdarabolás, létezik egy, Baire-mérhető darabokkal is.

A célunk, hogy Baire-mérhető szemszögből vizsgáljuk a különböző kombinatorikus kérdéseket. A következő kérdés például nyitott.

1. Kérdés. *Igaz-e a Vizing-tétel a Baire-mérhető esetben, vagyis, igaz-e az, hogy ha G legfeljebb d fokszámú Borel gráf a valós számokon, akkor G-nek létezik Baire-mérhető $d+1$ élszínezése?*

A felmerülő kérdések általában konkrét kombinatorikus kérdésekké fordulnak le (ez egyébként sokszor bizonyíthatóan is igaz [1]) megoldásukhoz nincs szükség a Borel halmazok vagy a Baire-mérhetőség definiciónál mélyebb szintű ismeretére.

Hivatkozások

[1] S. Brandt, Y.-J. Chang, J. Grebík, C. Grunau, V. Rozhoň, and Z. Vidnyánszky. Local problems on trees from the perspectives of distributed algorithms, finitary factors, and descriptive combinatorics. *arXiv preprint arXiv:2106.02066*, 2021. a conference version

[1] egy H halmaz Baire-mérhető, ha létezik olyan nyílt U, hogy $H \Delta U$ lefedhető megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójával

was presented at the *13th Innovations in Theoretical Computer Science conference (ITCS 2022)*.

[2] R. Dougherty and M. Foreman. Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 89(22):10726–10728, 1992.

[3] A. Marks and S. Unger. Baire measurable paradoxical decompositions via matchings. *Adv. Math.*, 289:397–410, 2016.