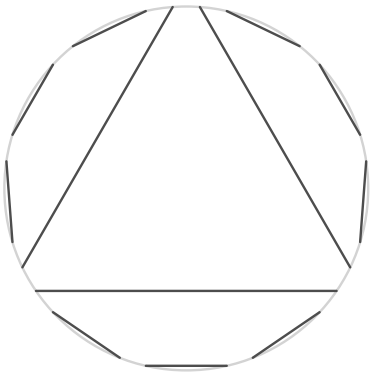
Pálvölgyi Dömötörrel és Lenger Dániellel együtt kombinatorikus geometriával foglalkoztunk; az általunk vizsgált fő problémában alternáló utakat kerestünk síkbeli szakaszok között, különböző megszorítások mellett.

A probléma először J. Urrutia 2002-es Open Problems in Computational Geometry című cikkében jelent meg.

Az alapfeladat szerint a síkon ki van jelölve n db diszjunkt, általános helyzetű szakasz és minél hosszabb olyan önmagát nem metsző töröttvonalat keresünk, melyben minden második szakasz a megjelöltek közül kerül ki. A töröttvonal hosszának azt nevezzük, hogy hány megjelölt szakaszt tartalmaz. A kérdés az, hogy általános (nagy) n esetén milyen alsó és felső korlát adható a leghosszabb ilyen töröttvonal hosszára.

Ezzel a kérdéssel korábban Pach János és Rom Pinchasi foglalkozott, és adott konstrukciót $2\sqrt{2n}$ felső korlátra, valamint bizonyítást $c \cdot \sqrt[3]{n}$ alsó korlátra. A bizonyításuk visszavezeti a feladatot egy speciális esetre, ahol az összes szakasz átmetszi az y tengelyt. Ebben a speciális esetben belátják, hogy kiválasztható egy $O(\sqrt{n})$ hosszú töröttvonal.

Ha a problémában szereplő eredeti szakaszokat úgy képzeljük el, mintha azok rögzített falak lennének, természetessé válik bevezetni egy újabb megszorítást: a töröttvonal ne metszhesse a fel nem használt falakat sem. Így a feladatnak egy lényegesen eltérő változatát kaptuk, melyre sikerült egy olyan konstrukciót találnunk, melyben a leghosszabb töröttvonal csak $6 \log_3 n$ hosszú. Ennek a konstrukciónak az első két rétege látható az alábbi ábrán.



A konstrukcióban minden szakasz az egységkör egy-egy húrja, és az ábra szerkezete kódolható egy fagráffal, aminek a csúcsai azon tartományok, melyeket a szakaszok és a körvonal határolnak; és két csúcs akkor van összekötve éllel, ha azok szomszédos tartományokat jelölnek. A szomszédos tartományokat mindig egy szakasz választja el, melyek a fa éleinek felelnek meg. A töröttvonalunk szomszédos tartományok között csak az elválasztó szakaszokon keresztül tud közlekedni. Így ha a töröttvonal átkelt egy szakaszon, akkor már nem tud visszatérni ugyanabba a tartományba. Ha a töröttvonal úgy érint egy szakaszt, hogy nem kel át rajta, akkor később már nem tud átjutni a szakasz túloldalára.

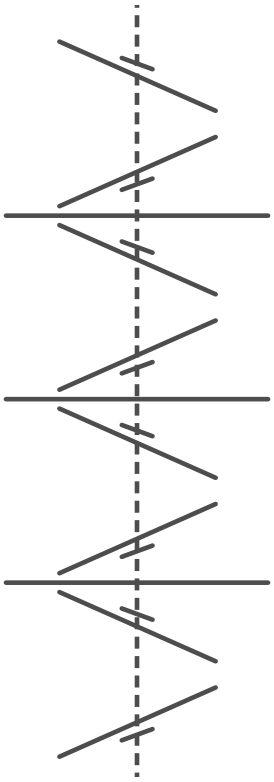
Tehát ha a fagráfon követjük a töröttvonal által érintett szakaszokat, akkor a nekik megfelelő élek egy utat fognak kijelölni, melyről helyenként leágazhat egy-egy él (ezek azoknak a szakaszoknak felelnek meg, melyeket érintettünk, de nem keltünk át rajtuk). Így az a célunk, hogy a fában azt az utat keressük meg, ami a legtöbb élt tartalmazza, az úttal közvetlen szomszédos éleket is beleszámítva.

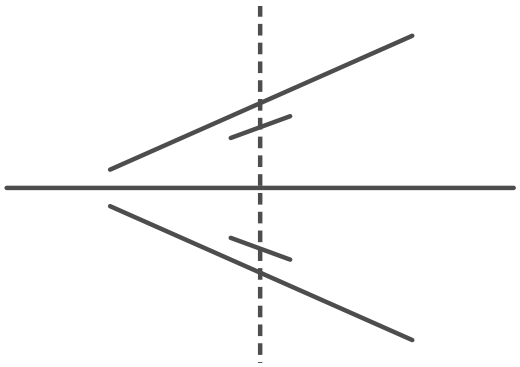
A konstrukcióbeli gráfban n él van és minden csúcsból kifelé $k = 3$ él indul ki. Ekkor a leghosszabb út hossza (a közvetlen szomszédos éleket is számolva) $2lk - k$, ahol $n = \frac{k^{l+1}-k}{k-1}$ és l a szintek száma.

Látható, hogy az úthossz logaritmikus az élek számában, és az alábbi érték mutatja meg, hogy $\log n$-nek hányszorosa: $\frac{2lk-k}{(l+1)\log k - \log(k-1)}$. Ahogy l tart végtelenbe, ez $\frac{2k}{\log k}$-hoz tart, ami $k = e$ esetén lenne minimális. Ez persze nem megvalósítható, az egész értékek közül $k = 3$ adja a legjobb megoldást. De felmerült az az ötletünk, hogy egyes rétegekben 2, másokban 3 él induljon kifelé a csúcsokból, megfelelő arányban.

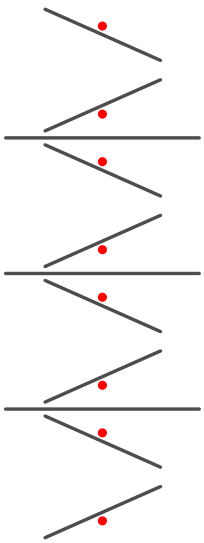
Kiderült azonban, hogy a $6 \log_3 n$-es felső becslés már ismert eredmény, D. Tóth Csaba és

Michael Hoffmann már megtalálta ezt a konstrukciót. Viszont megvizsgáltuk az eredeti, és az új megszorítás mellett is (hogy az eredetileg megjelölt szakaszok egyikét sem metszheti a töröttvonal) azt az esetet, mikor az összes megjelölt szakasz átmetszi az y tengelyt. Mikor elmetszhetjük a fel nem használt eredeti szakaszokat a töröttvonalunkkal, alábbi bal oldali ábrán láthatunk konstrukciót, ahol az n szakaszból $\frac{4}{5}n$-et tudunk legfeljebb a töröttvonalunkban felhasználni, mert az egyes részeiből, mely a jobb oldali ábránk, vagy 4 szakaszt választunk csak ki, vagy a töröttvonalunk a két rövidebb szakaszban kezdődik illetve végződik.





Az új megszorítások mellett, mikor nem metszhetünk el a töröttvonallal semmit, egy $c \cdot n^{log_8 5}$-ös becslést adunk, ahol az egyes konstrukciókat rekurzívan definiáljuk. Legyen a t. konstrukció K_t, és K_1 egy kis vízszintes vonal. Ekkor legyen K_{t+1} a következő:



Itt a piros pontok helyére beillesztjük K_t-t. Ekkor a fentebbiek alapján legfeljebb 5 piros pontot

érintünk a nyolcból, így ha s_t a szakaszok száma K_t-ben, és v_t amennyit ki tudunk választani, akkor $s_{t+1} = 8s_t + 11$, és $v_{t+1} = 5v_t + 11$, így $s_t \sim 8^t$, $v_t \sim 5^t$, tehát $v_t \sim s_t^{log_8 5}$.

Rövid ideig a probléma azon változatával is foglalkoztunk, ahol az általunk berajzolt szakaszok metszhetik az eredetieket, de egymást nem. Itt azonban hamar kiderült, hogy mindig összeköthető az összes szakasz. Az eredeti probléma azonban továbbra is nyitott marad; Pach és Pinchasi sejtése szerint az ismert $O(\sqrt[3]{n})$-es alsó és $O(\sqrt{n})$-es felső korlátok közül az utóbbi áll közel az igazsághoz. Továbbá felmerül az a kérdés is, hogy mi a helyzet, ha a töröttvonalban az általunk újonnan berajzolt szakaszok egymást metszhetik, de a használt eredeti szakaszokat nem.